

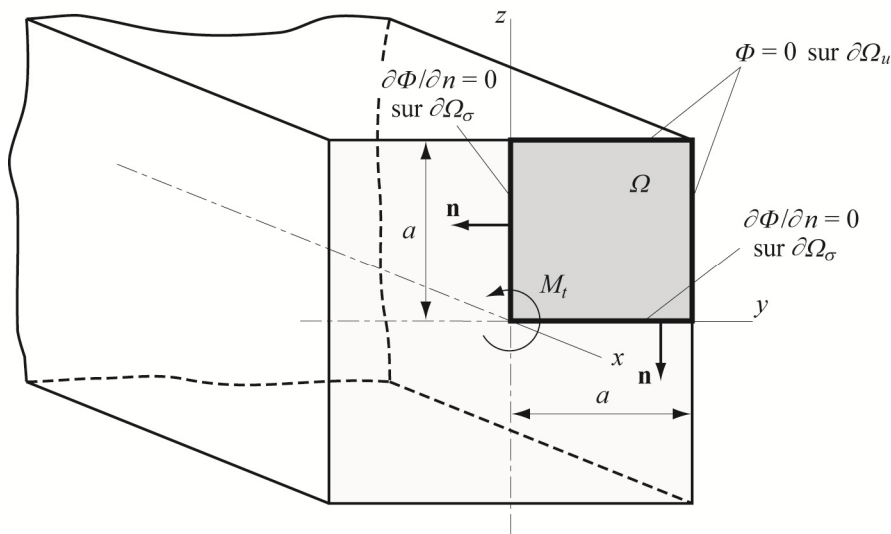
Exercice 1

La torsion uniforme d'une poutre prismatique de longueur unitaire et de section carrée de côté $2a$ est régie par la forme faible suivante

$$\Phi \in \mathcal{U} : \int_{\Omega} (\nabla \Phi)^T \nabla \delta \Phi \, dydz = \int_{\Omega} 2G\theta \delta \Phi \, dydz \quad \forall \delta \Phi \in \mathcal{V}$$

$$\mathcal{U} = \mathcal{V} = \{w(y, z) \mid w(y, z) \in H^1(\Omega); w(s) = 0, \forall s \in \partial\Omega_u\}$$

où les variables Φ et $\delta\Phi$ dénotent la fonction de contrainte ou d'Airy et sa contrepartie virtuelle, les quantités G et θ désignent respectivement le module de glissement du matériau et l'angle de torsion unitaire, les coordonnées x , y et z correspondent successivement à l'axe de la poutre et aux deux directions principales et la grandeur w est indifféremment la fonction de contrainte Φ ou sa contrepartie virtuelle $\delta\Phi$. La surface $\Omega =]0, a[\times]0, a[$ de bord $\partial\Omega$ à portion extérieure $\partial\Omega_u$ parcouru par l'abscisse s est, par symétrie du problème, le quart de la section totale. Sur le reste $\partial\Omega_\sigma$ de la frontière, la dérivée de la fonction Φ selon la normale extérieure $\mathbf{n}$ est nulle, de sorte que ce bord n'apparaît pas dans la formulation. Rechercher une solution approchée du problème sur la base d'une discrétisation du domaine Ω en un seul élément fini rectangulaire biquadratique lagrangien à 9 points nodaux en ne calculant que les contributions strictement nécessaires.

**Exercice 2**

Le moment de torsion M_t appliqué à l'arbre étudié à l'exercice précédent est lié à la fonction de contrainte Φ par la relation suivante

$$M_t = 8 \int_{\Omega} \Phi \, dydz$$

où Ω demeure le quart de l'aire de la section carrée (double symétrie de la section). Déterminer le moment de torsion approché résultant d'une discrétisation du domaine Ω en un seul élément fini rectangulaire biquadratique lagrangien et évaluer l'erreur relative commise par rapport à la valeur exacte de $2,25 a^4 G \theta$, où a est le côté de la section carrée, G dénote le module de glissement et θ désigne l'angle de torsion unitaire.